Dr. M. Bier (bier@is.mpg.de)
M.Sc. H. Bartsch

Physik der Flüssigkeiten: Vertiefung **SoSe 2018**

1. Übungsblatt (`http://www.is.mpg.de/dietrich/lehre/PdF`) **29. Mai 2018**

1. *Isotrope Tensoren vierter Stufe*

   Es soll gezeigt werden, dass die Komponenten A_{ijkl} eines isotropen Tensors vierter Stufe A, die invariant unter orthogonalen Transformationen sind, d.h.

   $$R_{pi}R_{qj}R_{rk}R_{sl}A_{ijkl} = A_{pqrs} \tag{1}$$

   (Summenkonvention!) für alle orthogonale $d \times d$-Matrizen $R \in O(d)$, von der allgemeinen Form

   $$A_{ijkl} = a\delta_{ij}\delta_{kl} + b\delta_{ik}\delta_{jl} + c\delta_{il}\delta_{jk} \tag{2}$$

   sind.

   Dazu sei die 4-fache Linearform

   $$L(w, x, y, z) := A_{ijkl}w_i x_j y_k z_l \tag{3}$$

   für beliebige Spaltenvektoren $w, x, y, z \in \mathbb{R}^d$ betrachtet.

   (a) Zeigen Sie, dass der Tensor A genau dann isotrop ist, wenn

   $$L(Rw, Rx, Ry, Rz) = L(w, x, y, z) \tag{4}$$

   für alle $R \in O(d)$ und $w, x, y, z \in \mathbb{R}^d$ gilt. Hierbei ist z.B. $Rw \in \mathbb{R}^d$ der Spaltenvektor mit den Komponenten $(Rw)_i = R_{ij}w_j$.

   (b) Zeigen Sie mit Hilfe der orthogonalen Matrizen $N^{(r)} \in O(d)$ aus Blatt 4, Aufgabe 11.(b), dass $A_{ijkl} = 0$, falls einer der Werte $1, \ldots, d$ in i, j, k, l genau einmal oder dreimal vorkommt.
   Schließen Sie daraus auf die Form

   $$A_{ijkl} = a_{ik}\delta_{ij}\delta_{kl}(1 - \delta_{ik}) + b_{ij}\delta_{ik}\delta_{jl}(1 - \delta_{ij}) + c_{ij}\delta_{il}\delta_{jk}(1 - \delta_{ij}) + d_i\delta_{ij}\delta_{ik}\delta_{il}. \tag{5}$$

   (hier keine Summenkonvention!)

   (c) Zeigen Sie mit Hilfe der orthogonalen Matrizen $P^{(rs)} \in O(d)$ aus Blatt 4, Aufgabe 11.(c), dass die Koeffizienten $a_{ik}, b_{ij}, c_{ij}, d_i$ in Gl. (5) tatsächlich nicht von den Indizes abhängen, d.h.

   $$a_{ik} = a, b_{ij} = b, c_{ij} = c, d_i = d, \tag{6}$$

   sodass

   $$A_{ijkl} = a\delta_{ij}\delta_{kl}(1 - \delta_{ik}) + b\delta_{ik}\delta_{jl}(1 - \delta_{ij}) + c\delta_{il}\delta_{jk}(1 - \delta_{ij}) + d\delta_{ij}\delta_{ik}\delta_{il}. \tag{7}$$

   (hier keine Summenkonvention!)

   (d) Zeigen Sie, dass sich $\delta_{ij}\delta_{kl}$ wie die Komponenten eines Tensors vierter Stufe transformieren.

Fortsetzung auf Seite 2

(e) Zeigen Sie mit Hilfe eines Gegenbeispiels, dass sich $\delta_{ij}\delta_{ik}\delta_{il}$ (hier keine Summenkonvention!) für $d \geq 2$ Raumdimensionen *nicht* wie die Komponenten eines Tensors vierter Stufe transformieren.

Schließen Sie daraus und aus Aufgabenteil (d) auf Gl. (2).

2. *Einfache Scherströmung*

Betrachten Sie in $d = 3$ Raumdimensionen eine inkompressible Flüssigkeit mit Scherviskosität η zwischen zwei in x-z-Richtung unendlich ausgedehnten parallelen planaren Wänden bei $y = a$ und $y = 0$. Die Wand bei $y = 0$ ist in Ruhe, während sich die Wand bei $y = a$ mit einer Geschwindigkeit v_a in x-Richtung bewegt. Es gibt keine äußeren Druckunterschiede in der Umgebung, d.h. $p(x = -\infty) = p(x = \infty)$.

(a) Argumentieren Sie unter Zuhilfenahme von Symmetrien und der Inkompressibilität, dass das Geschwindigkeitsfeld von der Form

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = v_x(y)\mathbf{e}_x \tag{8}$$

ist.

(b) Folgern Sie aus Aufgabenteil (a), dass die Navier-Stokes-Gleichung die Form

$$0 = -\nabla p + \eta\nabla^2\mathbf{v} \tag{9}$$

annimmt.

(c) Bestimmen Sie mit Hilfe von Gln. (8) und (9) das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ und die benötigte laterale Kraft pro Wandfläche.

3. *Couette-Strömung*

Betrachten Sie in $d = 3$ Raumdimensionen eine inkompressible Flüssigkeit mit Scherviskosität η zwischen zwei koaxialen unendlich ausgedehnten zylindrischen Wänden mit der z-Achse als gemeinsamer Symmetrieachse. Die innere Wand mit Radius $R_1 > 0$ ruhe, während die äußere Wand mit Radius $R_2 > R_1$ mit Kreisfrequenz ω rotiert.

Es bietet sich an, Zylinderkoordinaten zu benutzen; für diese lautet der Nabla-Operator

$$\nabla = \mathbf{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \mathbf{e}_z\frac{\partial}{\partial z}. \tag{10}$$

(a) Argumentieren Sie unter Zuhilfenahme von Symmetrien und der Inkompressibilität, dass das Geschwindigkeitsfeld von der Form

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = v_\varphi(r)\mathbf{e}_\varphi \tag{11}$$

ist und dass der Druck $p(\mathbf{r}, t)$ nicht vom Azimutalwinkel φ abhängt.

(b) Folgern Sie aus Aufgabenteil (a), dass die Navier-Stokes-Gleichung die Form

$$-\frac{\varrho_m v_\varphi(r)^2}{r}\mathbf{e}_r = -\nabla p + \eta\nabla^2\mathbf{v} \tag{12}$$

annimmt.

(c) Bestimmen Sie mit Hilfe von Gln. (11) und (12) das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ und das benötigte Drehmoment pro Zylinderlänge.